対数分岐点近くに於けるCauchy-Hadamardの定理
The Cauchy-Hadamard Theorem near a Logarithmic Branch Point

中嶋眞澄
Masumi Nakajima
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0197, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概要
Abstract
We prove here a theorem which claims that lim sup in Cauchy-Hadamard's theorem near a logarithmic branch point can be reduced to lim.

Key words ; (complex) function theory, power series, the Cauchy-Hadamard theorem or formula, radius of convergence.
Mathematics Subject Classification 2010;　30B10.

次の定理を証明する：

定理 1　$f(z)$ を整関数 *entire function*, $g(z)$ を有理型関数 *meromorphic function* とする。z_0 を $g(z)$ の m 位の零点 *zero*(または極 *pole*) とし，z_0 の十分近くの正則点 *regular point* を z とする。即ち，δ を $f(z)$ に依存する十分小さい正数 ($0<\delta=\delta(f(z))\ll 1$) として，$|z-z_0|<\delta$ とする。また，$F(z):=f(z)\log g(z)$ と定義する。このとき，

$$\limsup_{\nu\to\infty}\left|\frac{1}{\nu!}F^{(\nu)}(z)\right|^{\frac{1}{\nu}}=\lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{1}{\nu!}F^{(\nu)}(z)\right|^{\frac{1}{\nu}}$$

が成り立つ。但し，$f(z)\neq 0$ とする (この仮定は本質的ではない。$f(z)=0$ の場合は $f(z)$ の代わりに $f(z)+1$ としても $F(z)$ の特異点は変化しないからである。)。即ち，Cauchy-Hadamard の定理に出て来る lim sup を lim で置き換えることが可能である。

定理 1 の証明　z に2番目に近い $\log g(z)$ の特異点 singular point を z_1 とする：$|z-z_0|<\delta<|z-z_1|$．また，ν は十分大きいとする：$1\ll\nu$．
$F(z)$ を

$$F(z)=f(z)\log g(z)=f(z)\log\{g(z)(z-z_0)^m\}-mf(z)\log(z-z_0)$$

と分解すれば

$$\left|\frac{1}{\nu!}F^{(\nu)}(z)\right|\geq\left|\left|\frac{m}{\nu!}\{f(z)\log(z-z_0)\}^{(\nu)}\right|-\left|\frac{1}{\nu!}[f(z)\log\{g(z)(z-z_0)^m\}]^{(\nu)}\right|\right|\quad\cdots(1)$$

である。(1) の右辺の第2項は，特異点 z_0 が消失しているので

$$\limsup_{\nu\to\infty}|\frac{1}{\nu!}[f(z)\log\{g(z)(z-z_0)^m\}]^{(\nu)}|^{1/\nu}=|z-z_1|^{-1},$$

即ち，十分小さい任意の正数 $\epsilon_2>0$ に対して，ある $\nu_2\in\mathbf{N}$ が存在して

$$|\frac{1}{\nu!}[f(z)\log\{g(z)(z-z_0)^m\}]^{(\nu)}|\le[\frac{1+\epsilon_2}{|z-z_1|}]^\nu \; for\ \forall\nu>\nu_2 \quad\cdots(2)$$

である。

(1) の右辺第1項に関しては，

$$\begin{aligned}
&\frac{m}{\nu!}[f(z)\log(z-z_0)]^{(\nu)}=\frac{m}{\nu!}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}f^{(\nu-k)}(z)[\log(z-z_0)]^{(k)}\\
=\;&\frac{m}{\nu!}[f^{(\nu)}(z)\log(z-z_0)+\sum_{k=1}^{\nu}\binom{\nu}{k}f^{(\nu-k)}(z)\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(z-z_0)^k}]\\
=\;&m(z-z_0)^{-\nu}[(z-z_0)^\nu\frac{f^{(\nu)}(z)}{\nu!}\log(z-z_0)+\sum_{k=1}^{\nu}\frac{(-1)^{k-1}}{k(\nu-k)!}f^{(\nu-k)}(z)(z-z_0)^{\nu-k}]\\
=\;&m(z-z_0)^{-\nu}[\sum_{l=0}^{\nu-1}\frac{(-1)^{\nu-l-1}}{(\nu-l)l!}f^{(l)}(z)(z-z_0)^l+\frac{f^{(\nu)}(z)}{\nu!}\log(z-z_0)\cdot(z-z_0)(z-z_0)^{\nu-1}]\\
=\;&m(z-z_0)^{-\nu}[\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}f(z)+\sum_{l=1}^{\nu-1}\frac{(-1)^{\nu-l-1}}{(\nu-l)l!}f^{(l)}(z)(z-z_0)^l\\
&+\frac{f^{\nu}(z)}{\nu!}\log(z-z_0)\cdot(z-z_0)(z-z_0)^{\nu-1}]\\
=\;&\frac{m}{\nu}(z-z_0)^{-\nu}[(-1)^{\nu-1}f(z)+\frac{(-1)^{\nu-2}\nu}{(\nu-1)}f^{(1)}(z)(z-z_0)+\sum_{l=2}^{\nu-2}\frac{(-1)^{\nu-l-1}\nu}{(\nu-l)l(l-1)!}f^{(l)}(z)(z-z_0)^l\\
&+\frac{\nu}{(\nu-1)}\frac{f^{(\nu-1)}(z)}{(\nu-2)!}(z-z_0)^{\nu-1}+\frac{f^{(\nu)}(z)}{\nu!}\log(z-z_0)\cdot(z-z_0)(z-z_0)^{\nu-1}]\quad\cdots(3)
\end{aligned}$$

と変形する。

$f(z)$ が整関数であることに，Cauchy-Hadamard の定理を使うと，

$$\limsup_{l\to\infty}|\frac{f^{(l)}(z)}{(l-1)!}|^{1/l}=\limsup_{l\to\infty}|\frac{f^{(l)}(z)}{l!}|^{1/l}=0$$

となるが，これと，$l=2,3,\cdots,\nu-2,\nu\ge4$ に対して $(\nu-l)l\ge\nu$ であることを使うと，$f(z)$ に依存する正数 $K=K(f(z))>0$ が存在して，

$$\begin{aligned}
|\frac{(-1)^{\nu-l-1}\nu}{(\nu-l)l(l-1)!}f^{(l)}(z)| &< K,\quad(l=2,3,\cdots,\nu-2)\\
|\frac{(-1)^{\nu-2}\nu}{\nu-1}f^{(1)}(z)| &< K\\
|\frac{\nu}{(\nu-1)(\nu-2)!}f^{(\nu-1)}(z)| &< K
\end{aligned}$$

である。また，$\lim_{x\to0+0}x\log x=0$ を使うと，

$$\lim_{z\to z_0}|(z-z_0)\log(z-z_0)|=\lim_{z\to z_0}|z-z_0||\log|z-z_0|+i\arg(z-z_0)|=0$$

であることより，十分大きい $\nu \gg 1$, 十分小さい $|z-z_0| \ll 1$ に対して，

$$|\frac{f^{(\nu)}(z)}{\nu!}(z-z_0)\log(z-z_0)\cdot(z-z_0)^{\nu-1}| < K|z-z_0|$$

である。これらのことを使うと (3) の $[\cdot]$ の中の第 2，3，4，5 項は $|z-z_0| \ll 1$ に対して

$$\begin{aligned}
&|\frac{(-1)^{\nu-2}\nu}{(\nu-1)}f^{(1)}(z)(z-z_0)+\sum_{l=2}^{\nu-2}\frac{(-1)^{\nu-l-1}\nu}{(\nu-l)l(l-1)!}f^{(l)}(z)(z-z_0)^l \\
&+\frac{\nu}{(\nu-1)}\frac{f^{(\nu-1)}(z)}{(\nu-2)!}(z-z_0)^{\nu-1}+\frac{f^{(\nu)}(z)}{\nu!}\log(z-z_0)\cdot(z-z_0)(z-z_0)^{\nu-1}| \\
< \ & K\sum_{l=1}^{\nu-1}|z-z_0|^l+K|z-z_0| < 2K\frac{|z-z_0|}{1-|z-z_0|} \quad \cdots(4)
\end{aligned}$$

となる。ここで，$0<|z-z_0|<\delta$ ならば

$$2K\frac{|z-z_0|}{1-|z-z_0|} < \frac{|f(z)|}{2} \quad \cdots(5)$$

となるように，δ を K に依存して選べば，即ち $0<\delta=\delta(f(z)) \ll 1$ とすれば，(3),(4),(5) より

$$\begin{aligned}
&|\frac{m}{\nu!}[f(z)\log(z-z_0)]^{(\nu)}| \\
> \ & \frac{m}{\nu}|z-z_0|^{-\nu}||f(z)|-|\frac{(-1)^{\nu-2}\nu}{\nu-1}f^{(1)}(z)(z-z_0)+\sum_{l=2}^{\nu-2}\frac{(-1)^{\nu-l-1}\nu}{(\nu-l)l(l-1)!}f^{(l)}(z)(z-z_0)^l \\
&+\frac{\nu}{\nu-1}\frac{f^{(\nu-1)}(z)}{(\nu-1)!}(z-z_0)^{\nu-1}+\frac{f^{(\nu)}(z)}{\nu!}(z-z_0)\log(z-z_0)\cdot(z-z_0)^{\nu-1}|| \\
> \ & \frac{m}{\nu}|z-z_0|^{-\nu}[|f(z)|-\frac{|f(z)|}{2}] \\
= \ & \frac{m|f(z)|}{2\nu}|z-z_0|^{-\nu} \ for \ |z-z_0|<\delta \quad \cdots(6)
\end{aligned}$$

を得る。

(1),(2),(6) より，十分大きい $\nu \gg 1$，十分小さい $0<\epsilon_2 \ll 1$，$|z-z_0|<\delta$ なる $\forall z$ に対して，$|z-z_1|>|z-z_0|$ であるので

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{\nu}F^{(\nu)}(z)| &> \frac{m|f(z)|}{2\nu}|z-z_0|^{-\nu}-[\frac{1+\epsilon_2}{|z-z_1|}]^\nu \\
&= \frac{m|f(z)|}{2\nu}|z-z_0|^{-\nu}[1-\frac{2\nu}{m|f(z)|}[\frac{1+\epsilon_2}{|z-z_1|/|z-z_0|}]^\nu], \\
|\frac{1}{\nu}F^{(\nu)}(z)|^{1/\nu} &> [\frac{m|f(z)|}{2\nu}]^{1/\nu}|z-z_0|^{-1}[1-\frac{2\nu}{m|f(z)|}[\frac{1+\epsilon_2}{|z-z_1|/|z-z_0|}]^\nu]^{1/\nu} \quad \cdots(7)
\end{aligned}$$

一方，Cauchy-Hadamard の定理から，任意の十分小さい $\epsilon>0$，十分大きい任意の ν に対して

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{\nu!}F^{(\nu)}(z)|^{1/\nu} &\leq |z-z_0|^{-1}+\epsilon \\
&= \limsup_{\nu\to\infty}|\frac{1}{\nu!}F^{(\nu)}(z)|^{1/\nu}+\epsilon \quad \cdots(8)
\end{aligned}$$

(7),(8) で $\nu\to\infty$ として，ϵ, ϵ_2 は任意であることを使うことにより，

$$\limsup_{\nu\to\infty}|\frac{1}{\nu!}F^{(\nu)}(z)|^{1/\nu}=\lim_{\nu\to\infty}|\frac{1}{\nu!}F^{(\nu)}(z)|^{1/\nu}$$

となり，定理は完全に証明された。

参考文献

[1] Tatuzawa,T. 龍沢周雄：*Complex Function Theory*　関数論,1980 ,Kyouritsu Shuppan 共立出版, (v+274)pp.,p.68.

[2] Nakajima,M. 中嶋眞澄：The Cauchy-Hadamard Theorem near some poles 極の近くに於ける Cauchy-Hadamard の定理. *Kagoshima Jour. of Economics*, **53**(2013, March), 9-12, 鹿児島経済論集，第 53 巻第 1-4 号合併号，2013 年 3 月，9-12.

[3] Nakajima,M. 中嶋眞澄：The Cauchy-Hadamard Theorem near some poles (II) 極の近くに於ける Cauchy-Hadamard の定理（II），*Kagoshima Jour. of Economics*, **55**(2015, February)(in this Journal volume), 1-4, 鹿児島経済論集，第 55 巻第 1-4 号合併号，2015 年 2 月，1-4.

(received 20 January 2015.)